МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ

ДОНЕЦКИЙ ИНСТИТУТ ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВА

Дегтярев В.С.,Зубченко А.К.,Иванов Б.П.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

Утверждено на заседании кафедры высшей математики и информатики
протокол от 1998г.

Одобрено Методической комиссией института

ДОНЕЦК 1998

УДК 519.2

Теория вероятностей и математическая статистика. Методические указания к самостоятельной работе / Сост :Дегтярев В.С., Зубченко А.К., Иванов Б.П. - Донецк : ДИП, 1998. 85 с.

В пособии приведены по 30 вариантов заданий для самостоятельной работы при изучении курса теории вероятностей и математической статистики. Задания сопровождаются объяснением решения типовых примеров или образцом их выполнения. Они могут быть использованы как расчетные индивидуальные домашние задания для студентов стационара или как тексты заданий контрольных работ студентов - заочников.

Пособие предназначено для студентов экономических и техничес-ких вузов.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие составлено в соответствии с программой курса "Теория вероятности и математическая статистика" для студентов экономических специальностей. Их цель - обеспечить студентов практическим материалом при проведении самостоятельной работы.

Пособие содержит индивидуальные задания по основным разделам курса (теории вероятности и математической статистике), которые могут быть использованы как задания для контрольных работ студен-тов-заочников или как тексты для индивидуальных расчетных работ студентов, обучающихся на стационаре.

Перед выполнением контрольных заданий студент должен изучить соответствующий теоретический материал. Настоящее пособие ориентировано на то, что основные положения теории будут изучаться по учебному пособию [1]. Однако в нем рассматривается материал только по теории вероятности и нет математической статистики. Для этих разделов можно использовать [2] и [3] или другие учебники и пособия, например, [5] - [6] .

Рекомендуется задачи контрольной работы по теории вероятности выполнять в той последовательности, в которой они приведены в задании, что соответствует логической структуре курса.

В пособии имеются образцы решения и оформления заданий по всем темам изучаемого курса, а также перечень вопросов для самостоятельного изучения материала и подготовки к экзаменам.

1.ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ КУРСА

1.Предмет теории вероятностей. Случайные, достоверные и невозможные события. Совместные и несовместные события. Полная группа событий. Понятие о пространстве элементарных событий.

2.Классическое определение вероятности.

3.Перестановки, размещения, сочетания (чем они отличаются и формулы для вычисления). Правило произведений при вычислении числа событий.

4.Относительная частота, устойчивость относительной частоты. Статистическое определение вероятности.

5.Сумма случайных событий. Теорема о сложении вероятностей для несовместных событий.

6.Произведение случайных событий. Зависимые и независимые события. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей зависимых и независимых событий.

7.Противоположные события. Решение задачи о вероятности появления хотя бы одного события.

8.Формула полной вероятности.

9.Формула Байеса (о переоценке вероятности гипотезы).

10.Независимые испытания Бернулли. Формула Бернулли.

11.Локальная предельная теорема Муавра - Лапласа (о вероятности появления события m раз при большом числе испытаний Бернулли).

12.Интегральная теорема Муавра - Лапласа (о вероятности появления события от m_1 до m_2 раз в испытаниях Бернулли). Функция Лапласа и ее свойства.

13.Формула редких событий (Пуассона).

14.Случайные величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Законы распределения дискретных случайных величин.

15.Функция распределения случайной величины как один из способов задания закона распределения случайной величины и ее свойства.

16.Плотность вероятности случайной величины и ее свойства. Связь плотности с функцией распределения.

17.Математическое ожидание дискретной и непрерывной случайной величины и его свойства.

18.Дисперсия как мера отклонения случайной величины от ее математического ожидания. Формулы для вычисления дисперсии. Среднее квадратическое отклонение.

19.Биномиальный закон распределения случайной величины, его математическое ожидание и дисперсия.

20.Закон Пуассона распределения случайной величины, его математическое ожидание и дисперсия.

21.Равномерный закон распределения непрерывной случайной величины, математическое ожидание и дисперсия равномерной случайной величины.

22.Нормальный закон (закон Гаусса) распределения случайной величины. Геометрический и вероятностный смысл параметров a и s .

23.Формула для вычисления вероятности попадания нормальной случайной величины в заданный интервал.

24.Формула для вычисления вероятности заданного отклонения нормальной случайной величины от ее математического ожидания.

25.Правило трех сигм.

26.Закон больших чисел. Примеры действия закона больших чисел.

27.Предмет и задачи математической статистики.

28.Простая статистическая совокупность (выборка). Вариационный и интервальный вариационный ряды .

29.Эмпирическая функция распределения. Частота и относительная частота варианты. Полигон и гистограмма относительных частот. Теорема Гливенко.

30.Точечные оценки параметров распределения и требования к ним (несмещенность, эффективность, состоятельность).

31.Выборочные оценки математического ожидания и дисперсии. Исправленная выборочная дисперсия.

32.Интервальные оценки, точность оценки, доверительная вероятность (надежность), доверительный интервал. Нахождение доверительного интервала математического ожидания случайной величины при известном и неизвестном среднем квадратическом отклонении.

33.Нахождение доверительного интервала для среднего квадратического отклонения нормальной случайной величины.

34.Задача о статистической проверке гипотез.

35.Критерий согласия Пирсона и схема его применения для статистической проверки гипотез.

2.МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Задание 1

В текстах заданий контрольной работы по теории вероятностей важно ввести обозначения событий, используемых для решения, установить связь между ними. Для этого изучите, как вводятся понятия суммы и произведения событий, а также понятие противоположного события (см. [1], гл.2, §1).

Под **суммой** двух событий А и В понимают такое событие С, которое состоит в том, что имело место или событие А, или событие В, или и событие А, и событие В одновременно: $A + B = C$.

Произведением событий А и В называется событие С, состоящее в обязательном одновременном появлении и события А, и события В:

$$A \cdot B = C .$$

Событие $\overline{A}$ называется противоположным событию A, если оно происходит тогда и только тогда , когда не происходит событие A.

После этого можно решать задание 1 из контрольной работы по теории вероятностей.

Пример1.Три стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Записать выражения событий, состоящих в том, что: а) в мишень попа-ли все три стрелка; б) попал только один стрелок ; в)попал хотя бы один стрелок.

Решение. Обозначим A_1 событие - первый стрелок попал в цель, A_2 - второй попал, A_3 - третий попал. Тогда событие С - все три стрелка попали в цель (иначе говоря, и первый попал, и второй попал, и третий попал) можно записать в виде выражения $C = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

Запишем событие Д - в мишень попал только один стрелок

$$Д=A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3.$$

Это выражение можно прочитать так: первый стрелок попал в мишень, второй не попал, и третий не попал или первый не попал, второй попал и третий не попал или первый и второй не попали, а третий попал.

Событие Е - попал хотя бы один стрелок, означает, что первый стрелок попал, а второй и третий не попали или второй попал, а первый и третий не попали, или третий попал, а первый и второй не попали, или первый и второй попали, а третий нет, или первый и третий попали, а второй нет, или второй и третий попали, а первый нет или попали и первый , и второй , и третий стрелки :

$$E = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 +$$
$$+\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3.$$

Задания 2 и 3

Второе и третье задания контрольной работы посвящены нахождению вероятности, исходя из классического определения вероятности события (см.[1], гл.1, §1).

Классической вероятностью события А называется отношение числа равновозможных элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события А, к общему числу всех равновозможных элементарных исходов данного испытания $p(A) = \dfrac{m}{n}$.

После уяснения этого определения следует изучить понятия перестановок, размещений и сочетаний, необходимых для подсчета числа различных исходов в каждом испытании.

Перестановки - это комбинации из одних и тех же элементов, отличающиеся только порядком этих элементов в комбинации. Например, из чисел 1,2,3 можно образовать такие перестановки : 1,2,3, или 1,3,2, или 2,3,1, или 3,1,2 и другие. Из n элементов можно образовать n! (читается “эн факториал”) различных перестановок. Заметим, что выражение n!

означает произведение n первых чисел натурального ряда, т.е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ...(n-2) \cdot (n-1) \cdot n$.

Размещениями из n элементов по m элементов называются комбинации, состоящие из m элементов, взятых из одних и тех же n элементов, и отличающиеся либо самими элементами, либо их порядком в комбинации. Число различных размещений из n элементов по m элементов определяется по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1).$$

Сочетаниями из n элементов по m элементов называются такие комбинации, состоящие из m элементов, взятых из одних и тех же n элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом (т.е. порядок элементов в комбинации в отличие от размещений значения не имеет). Пример сочетаний из трех элементов 1, 2 и 3 по два элемента - это комбинации из чисел 1 и 2, или 1 и 3, или 2 и 3. Число различных сочетаний из n элементов по m элементов определяется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример 2. Партия из 10 деталей содержит одну нестандартную. Какова вероятность того, что при случайной выборке 5 деталей из этой партии все они будут стандартными?

Решение. Здесь число случайных выборок из 10 деталей по 5 деталей (порядок деталей в выборке значения не имеет) равен $n = C_{10}^5$. Это и есть число всех равновозможных исходов в данном опыте. Нас из этих исходов интересуют только те, которые состоят из стандартных деталей. Всех стандартных деталей девять и из них можно образовать различных выборок по пять деталей $m = C_9^5$. Таким образом, искомая вероятность

равна $$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_9^5}{C_{10}^5} = \frac{9!}{5! \cdot 4!} \cdot \frac{5! \cdot 5!}{10!} = \frac{1}{2}.$$

Задания 4, 5 и 6

В заданиях 4, 5 и 6 нужно определять вероятность, пользуясь теоремами сложения и умножения вероятностей и следствиями из этих теорем (см.[1],гл.2,§ § 1- 4).

При применении теорем о вероятности суммы событий следует обратить внимание, являются ли слагаемые события совместными или нет, так как для этих случаев теоремы имеют разный вид:

для несовместных событий A и B $p(A + B) = p(A) + p(B)$;

для совместных событий $p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB)$.

Аналогично, для теорем о вероятности произведения событий следует выяснять, являются ли эти события зависимыми или независимыми .

Для зависимых событий $p(AB)=p(A) \cdot p(B/A)$,

для независимых $p(AB) =p(A) \cdot p(B)$.

В этих формулах p(A) и p(B) - вероятности событий A и B, p(B/A) - вероятность события B при условии, что событие A имело место (т.е. условная вероятность).

Пример 3. В лотерее выпущено 10000 билетов и установлено 10 выигрышей по 200грв., 100 - по 100грв., 500 - по 25 грв. и 1000 - по 5 грв. Гражданин купил один билет. Какова вероятность, что он выиграет не меньше 25 грв.?

Решение. Обозначим события :

A - выигрыш не менее 25 грв., A_1 - выигрыш равен 25 грв., A_2 - выигрыш равен 100 грв., A_3 - выигрыш равен 200 грв. Поскольку куплен только один билет, то на него возможен только один выигрыш, а значит события A_1, A_2, A_3 несовместны. Поэтому событие - выигрыш на один купленный билет не менее 25грв означает сумму трех несовместных событий: A_1 -выигрыш в 200 грв, A_2 - выигрыш в 100 грв., A_3 - выигрыш в 25 грв.:$A = A_1 + A_2 + A_3$. Так как события несовместны, то согласно теореме о сумме вероятностей

$$p(A) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) = \frac{500}{10000} + \frac{100}{10000} + \frac{10}{10000} = 0{,}061.$$

Пример 4. В ящике 7 белых и 5 черных шаров. Последовательно вынуты два шара. Какова вероятность, что оба они белые?

Решение. Обозначим через A интересующее нас событие (оба вынутых шара белые), B - первый вынутый шар белый, C - второй вынутый шар белый. События B и C - зависимые, так как вероятность события C зависит от того, каким был первый шар, т.е. от того, произошло ли событие B. Поэтому

$$A = B \cdot C \qquad p(A) = p(B) \cdot p(C / B),$$

где $p(C / B)$- вероятность того, что второй вынутый шар белый при условии, что произошло событие B (первый вынутый шар был белым). В данном примере $p(B)=\frac{7}{12}$, $p(C / B)= \frac{7-1}{12-1} = \frac{6}{11}$. Следовательно, вероятность того, что оба вынутых шара - белые, равна

$$p(A) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{7}{22}.$$

При решении задач данной группы следует изучить схему определения вероятности события, появляющегося в испытании хотя бы один раз (обращаем внимание на слова “хотя бы один раз”). В этом случае обозначаем это событие, например, через A. Тогда противоположное событие $\overline{A}$ заключается в том, что интересующее нас событие не появляется ни разу. Вероятность противоположного события обычно находится просто и затем вероятность интересующего нас события вычисляется по формуле: $\mathrm{p}(A) = 1 - \mathrm{p}(\overline{A})$.

Пример 5. Устройство состоит из трех последовательно включенных независимых элементов, работающих безотказно с вероятностями соответственно 0,851, 0,751 и 0,701. Найти вероятность отказа в работе всего устройства.

Решение. Очевидно, устройство выйдет из строя , если откажет хотя бы один элемент (так как ввиду последовательного включения они не дублируют друг друга). Обозначим это событие A. Тогда вероятность противоположного события $\overline{A}$ (нет отказа в работе и первого элемента, и второго, и третьего) легко находится по теореме умножения для независимых событий p($\overline{A}$)= 0,851$\cdot$0,751$\cdot$0,701= 0,448.

Искомая вероятность отказа в работе всего устройства

$$\mathrm{p}(A) = 1 - \mathrm{p}(\overline{A}) = 1 - 0{,}448 = 0{,}552$$

Задания 7 и 8

Для решения этих задач нужно изучить формулы **полной вероятности** и **Байеса** (см.[1], гл.2, §§5-6). Эти формулы рассматривают следующие задачи. Пусть в результате испытания обязательно наступает только одно из событий H_1, H_2, H_3, ... H_n (т.е. эти события образуют полную группу несовместных событий). Пусть также при каждом испытании может наступать или не наступать некоторое событие А. Формула полной вероятности позволяет определить вероятность события А, если известны вероятности событий H_i и вероятности события А при усло-вии, что при испытании происходит данное событие H_i, т.е. условные вероятности p(А / H_i):

$$p(A) = p(H_1)\cdot p(A/H_1 + p(H_2)\cdot p(A/H_2) + \ldots + p(H_n)\cdot p(A/H_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p(H_i)\cdot p(A/H_i).$$

Заметим, что события H_i в этих задачах называются гипотезами.

Теперь предположим, что при проведении испытания событие А произошло. На вопрос, какова вероятность, что оно появилось совместно с данным событием H_i , отвечает формула Байеса :

$$p(H_i / A) = \frac{p(H_i) \cdot p(A / H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p(H_i) \cdot p(A / H_i)}.$$

Итак, формула Байеса дает вероятность гипотезы H_i при условии, что событие А имело место (т.е. условную вероятность гипотезы). Поэтому ее еще называют формулой переоценки гипотезы.

Пример 6. Из поступившей в магазин продукции 50% изготовлено на первой фабрике, 30% на второй и 20% на третьей. Для продукций фабрик брак составляет : для первой фабрики - 2%, второй - 3% и третьей - 5%. Какова вероятность, что изделие, приобретенное в магазине, окажется бракованным?

Решение. Введем следующие гипотезы: H_1 - приобретаемое изделие изготовлено на первой фабрике, H_2 - на второй, H_3 - на третьей. Их вероятности даны: $p(H_1) = 0,5$, $p(H_2) = 0,3$, $p(H_3) = 0,2$. Известны также условные вероятности $p(A/H_1)=0,02$ (это вероятность того, что изделие бракованное при условии, что оно изготовлено первой фабри-кой), $p(A/H_2)=0,03$, $p(A/H_3)=0,05$. Здесь через А обозначено событие - изделие бракованное. Тогда согласно формуле полной вероятности

$$p(A) = p(H_1) \cdot p(A / H_1 + p(H_2) \cdot p(A / H_2) + p(H_3) \cdot p(A / H_3) =$$

$$=0,5 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,03 + 0,2 \cdot 0,05 = 0,029 .$$

Пример 7. Изменим вопрос в предыдущем примере 6. Будем полагать, что некто купил в магазине изделие и оно оказалось бракованным (т.е. событие А произошло). Какова вероятность того, что оно изготовлено третьей фабрикой?

Решение. Здесь нужно переоценить вероятность третьей гипотезы, т.е. определить вероятность изготовления купленного изделия на третьей фабрике при условии, что оно оказалось бракованным ($p(H_3/A)$). Такую условную вероятность определяет формула Байеса:

$$\mathrm{p}(H_3 / A) = \frac{p(H_3) \cdot p(A / H_3)}{p(H_1) \cdot p(A / H_1) + p(H_2) \cdot p(A / H_2) + p(H_3) \cdot p(A / H_3)} =$$

$$= \frac{0,2 \cdot 0,05}{0,5 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,03 + 0,2 \cdot 0,05} = 0,345.$$

Задания 9,10,11

В этих задачах рассматриваются **независимые испытания Бернулли** (см.[1],гл.3,§§ 1 – 5). Задача формулируется следующим образом. Производится n испытаний (опытов), в каждом из которых возможен только один из двух исходов: событие A появляется или нет (последнее означает появление противоположного события $\overline{A}$). При этом вероятность появления или непоявления события A от испытания к испытанию не меняется. Требуется определить, какова вероятность, что в n испытаниях событие A появится ровно m раз. Ответ на этот вопрос дает **формула Бернулли**:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

В этой формуле p=p(A), q = q($\overline{A}$) = 1 - p ,C_n^m- число сочетаний из n по m .Этой формулой обычно не пользуются при большом числе испытаний, так как вычисление числа сочетаний C_n^mв этом случае становит-ся громоздким, а потому затруднительным. В этих случаях целесообраз-но пользоваться приближенной **формулой Лапласа**:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} j_0(x),$$

где $j_0(x)$ - некоторая функция, значения которой определяются по специальным таблицам в зависимости от значений $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$. Такую таблицу можно найти в справочниках по высшей математике или в пособиях по теории вероятностей (см., например, [1], стр.145). Следует помнить, что функция $j_0(x)$- четная, т.е. $j_0(-x) = j_0(x)$.

Отметим также формулу **интегральной теоремы Лапласа**, которая также применяется при большом числе испытаний и определяет вероятность того, что событие A в n испытаниях Бернулли наступит не менее m_1 и не более m_2 раз:

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Здесь $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x)$- функция Лапласа, значения которой также приводятся в специальных таблицах по теории вероятностей (см. [1] , стр.147). При нахождении значений этой функции при отрицательных значениях аргумента следует учесть, что функция эта нечетная и потому $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Формулы Лапласа дают значительную погрешность при малой вероятности события A в испытаниях Бернулли. Поэтому в случаях, когда число испытаний n велико, а вероятность события A мала (меньше 0,1), для вычисления вероятности того, что событие A появится m раз в n испытаниях (т.е. вместо формул Бернулли и Лапласа), применяется **формула Пуассона** (формула редких событий) :

$$P_n(m) \approx \frac{l^m}{m!} e^{-l} \text{ ,где } l = np.$$

В некоторых пособиях по теории вероятностей имеются таблицы значений функции $\frac{l^m}{m!} e^{-l}$.

Пример 8. Изделия некоторого производства содержат 5 % брака. Найти вероятность того, что среди пяти наугад взятых изделий будут два бракованных.

Решение .Вероятность события A (данное изделие бракованное) p(A)=p=0,05. Тогда q=1 - p=0,95. Вероятность того, что среди пяти изделий два бракованных определяем по формуле Бернулли, так как число испытаний (изделий) невелико:

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^{5-2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} 0{,}95^2 0{,}05^{5-2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} 0{,}95^2 \cdot 0{,}05^3 = 0{,}00113.$$

Пример 9. Вероятность поражения цели стрелком при одиночном выстреле равна p=0,2. Какова вероятность того, что при 100 выстрелах цель будет поражена ровно 20 раз?

Решение. Здесь p = 0,2, q = 0,8, n = 100, m = 20. Так как число испытаний n велико, используем локальную формулу Лапласа. Для этого определяем

$$\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 4, x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{20 - 100 \cdot 0{,}2}{4} = 0.$$

Далее по таблице ([1], стр.145) определяем $j_0(x) = j_0(0) = 0{,}3989.$

Тогда искомая вероятность $P_{100}(20) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} j_0(x) = \frac{1}{4} \cdot 0{,}3989 = 0{,}0999.$

Пример 10 . При выработке некоторой массовой продукции вероятность появления одного нестандартного изделия составляет 0,01. Какова вероятность, что в партии из 100 изделий этой продукции два изделия будут нестадартными ?

Решение.Так как вероятность p=0,01 мала, а число испытаний n=100 велико, причем $l = np$=100$\cdot$ 0,01=1, то искомая вероятность определяется по формуле Пуассона:

$$P_{100}(2) \approx \frac{l^2}{2!} e^{-l} = \frac{1}{2} e^{-1} = 0{,}184.$$

Задания 12,13 и 14

Решению этих задач должно предшествовать изучение большого раздела теоретического материала о **случайных величинах и законах**

их распределения([1],гл.4, §§1-3), а также о числовых характеристиках случайных величин ([1],гл.5, §§1-2).

Соответствие между всеми возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется законом распределения данной случайной величины. Этот закон может задаваться таблицей (в случае дискретной случайной величины, принимающей конечное число значений), или формулой. Но чаще в качестве такого закона выступают интегральная функция распределения или дифференциальная функция (плотность вероятности) случайной величины.

Функцией распределения F(x) или интегральным законом распределения случайной величины X называется функция, значение которой в каждой точке x равно вероятности события, что случайная величина X примет значение в промежутке $(-\infty, x)$, т.е. F(x)= P ($-\infty <$ X $< x$). Так как значение функции F(x) есть вероятность, то $0 \le F(x) \le 1$. С помощью этой функции можно определять вероятность того, что случайная величина X примет значение в заданном промежутке $[a, b]$:

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a).$$

Плотностью вероятности или дифференциальным законом распределения случайной величины X называется функция f(x), являющаяся производной от функции распределения F(x), т.е. f(x)=$F'(x)$. Из этого определения следует, что функцию распределения f(x), можно рассматривать как первообразную для плотности вероятности f(x), т.е.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

С помощью плотности вероятности можно вычислять вероятность попадания случайной величины в промежуток $[a, b]$

$$P(a \le X \le b) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Отметим еще одно свойство плотности вероятности, часто встречающееся в задачах:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Пример 11. Дан ряд (закон) распределения случайной величины X:

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Требуется: а)найти функцию распределения этой случайной величины ; б)найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, не превосходящее по абсолютной величине 1.

Решение.а)Область определения любой функции распределения $(-\infty,+\infty)$. Разобьем ее точками x_i на промежутки и для каждого из них найдем выражение функции распределения F(x), исходя из ее определения .

Внутри промежутка (-$\infty,-2]$ случайная величина X значений не принимает (см. таблицу). Поэтому для любого x из этого промежутка

F(x)= P (-∞< X < x)=0.

Возьмем теперь $x\in$ (-2;-1]. Для любого x из этого промежутка строим промежуток (-$\infty, x)$. Внутри его случайная величина X принимает только одно значение x=-2 с вероятностью 0,1. Значит для любого $x\in$ (-2;-1]

F(x)= P (-∞< X < x)=P(X=-2)=0,1.

Аналогично, внутри промежутка (-$\infty, x)$, где $x\in$(-1;0] случайная величина принимает значение x = -2 с вероятностью 0,1 и x = -1 с вероятностью 0,2. Поэтому

для $x\in$(-1;0]F(x)= P (-∞< X < x)=P(X=-2)+P(X=-1)=0,1 + 0,2= 0,3.

Для $x\in$ (0;1] F(x) = P(X=-2)+ P(X=-1) + P(X=0)= 0,1 + 0,2 +0,2=0,5.

Для $x\in$ (1;2] F(x)= P(X=-2)+P(X=-1) + P(X=0) +P(X=1)=0,5 +0,4 = 0,9.

Для $x\in$ (2;+∞) F(x)= P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0,9+0,1=1.

Окончательно функцию распределения случайной величины X можно записать в виде

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\in(-\infty,-2], \\ 0{,}1, & x\in(-2,-1], \\ 0{,}3 & x\in(-1{,}0], \\ 0{,}5 & x\in(0{,}1], \\ 0{,}9 & x\in(1{,}2], \\ 1{,}0 & x\in(2,+\infty]. \end{cases}$$

б)Определим вероятность того, что случайная величина X примет значение по модулю меньшее 1 или, что то же самое, -1 < X < 1.

P(-1< X < 1) =F (1) - F (-1) = 0,5 - 0,1 = 0,4.

Пример 12. Непрерывная случайная величина X задана интегральной функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ Ax^2+B, & 0<x<4, \\ 1, & x\ge 4. \end{cases}$$

Найти : а)коэффициенты A и B ; б) дифференциальную функцию распределения f(x).

Решение.

а)Для определения коэффициентов А и В используется тот факт, что F(x) для непрерывной случайной величины является функцией непрерывной на всей числовой прямой, а, следовательно, в точках x=0 и x=4. Поэтому $\lim\limits_{x\to -0} F(x)=\lim\limits_{x\to +0} F(x)=F(0)\Rightarrow 0=B,$

$$\lim_{x\to 4-0} F(x)=\lim_{x\to 4+0} F(x)=F(4)\Rightarrow 16A+B=1.$$

Получена система уравнений относительно А и В :

$$\begin{cases} B=0 \\ 16A+B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=0 \\ A=\dfrac{1}{16} \end{cases}.$$

Итак,

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \dfrac{1}{16}x^2, & 0<x<4, \\ 1, & x\ge 4. \end{cases}$$

б)находим плотность вероятности (дифференциальную функцию распределения) случайной величины Х как производую от функции ее распределения (от интегральной функции):

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \dfrac{1}{8}x, & 0<x<4, \\ 1, & x\ge 4. \end{cases}$$

В задачах 12-14 контрольной работы по теории вероятности необходимо определять важные числовые характеристики случайной величины - математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклоненение.

Математическим ожиданием случайной величины (его иногда называют средним значением случайной величины) называется число, вычисляемое по формулам:

$M\left[X\right]=\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ для дискретной случайной величины и

$M\left[X\right]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ для непрерывной случайной величины (здесь $f(x)$ - плотность вероятности случайной величины).

Дисперсия случайной величины характеризует рассеяние случайной величины относительно ее математического ожидания и представляет собой математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания

$$D[X]=M[X-M[X]]^2.$$

Для дискретной случайной величины эта формула имеет вид:

$$D[X]=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-M[X])^2 p_i,$$

а для непрерывной случайной величины

$$D[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M[X])^2 f(x)dx.$$

На практике для вычисления дисперсии более удобными, чем эти, является формула

$$D[X]=M\left[X^2\right]-(M[X])^2.$$

Здесь $M\left[X^2\right]$ - математическое ожидание случайной величины X^2.

Рассеяние случайной величины от ее математического ожидания характеризует также среднее квадратическое отклонение, представляющее собой квадратный корень из дисперсии $s[X]=\sqrt{D[X]}$. Эта величина удобнее дисперсии, так как она имеет ту же размерность, что и случайная величина.

Пример 13. Случайная величина Х задана дифференциальной функцией

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1,\\ a(x-1), & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Найти: а)значение параметра a; б) функцию распределения F(x) ; в)вероятность попадания случайной величины в промежуток [0;1,5] ; г) математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Решение . а) Значение параметра a находится из свойства дифференциальной функции $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$. При записи этого интеграла учтем, что функция $f(x)$ имеет на различных промежутках различное аналитическое выражение:

$$\int_{-\infty}^{1}0\cdot dx+\int_{1}^{2}a(x-1)dx+\int_{2}^{+\infty}0dx=1,\Rightarrow a\frac{(x-1)^2}{2}\Bigg|_1^2=1,\Rightarrow \frac{a}{2}=1,\Rightarrow a=2.$$

б) Построение интегральной функции F(x)произведем на основании формулы

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Для $x \in]-\infty,1]$ $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0,$

для $x \in]1,2]$ $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{1} 0dx + \int\limits_{1}^{x} 2(x-1)dx = (x-1)^2 \Big|_{1}^{x} = (x-1)^2,$

для $x \in]2,+\infty[$ $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{1} 0dx + \int\limits_{1}^{2} 2(x-1)dx + \int\limits_{2}^{x} 0dx = (x-1)^2 \Big|_{1}^{2} = 1.$

в) $P(0 \le X \le 1{,}5) = F(1{,}5) - F(0) = (1{,}5-1)^2 - 0 = 0{,}25.$

г) Так как рассматривается непрерывная случайная величина, то ее математическое ожидание определяется по формуле

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{1} x \cdot 0dx + \int\limits_{1}^{2} x \cdot 2 \cdot (x-1)dx + \int\limits_{2}^{+\infty} x \cdot 0dx = 2\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1}^{2} = \frac{5}{3}.$$

Для нахождения дисперсии случайной величины X предварительно вычислим математическое ожидание случайной величины X^2:

$$M(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{1} x^2 \cdot 0dx + \int\limits_{1}^{2} x^2 2(x-1)dx + \int\limits_{2}^{+\infty} x^2 0dx = 2\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{1}^{2} = \frac{17}{6}.$$

Тогда дисперсия случайной величины X равна

$$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2 = \frac{17}{6} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

Задание 15

В этой задаче рассматривается наиболее распространенная на практике **нормальная случайная величина**. Кратко ее можно характеризовать как случайную величину, на значение которой влияет большое число факторов, причем ни одно из этих влияний не является решающим. Плотность вероятности нормальной случайной величины X име-ет вид

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}}.$$

Здесь a и s - некоторые константы. Их вероятностный смысл : параметр a равен математическому ожиданию этой нормальной случайной величины (M(X)=a), параметр s равен ее среднему квадратическому отклонению (s (X)= s).

Для решения задач следует применять следующие формулы :

1) вероятность попадания нормальной случайной величины в заданный промежуток [a ; b]

$$P(a < X < b) = \Phi(\frac{b-a}{s}) - \Phi(\frac{a-a}{s}),$$

где Ф(x) - функция Лапласа (см. [1], таблица на стр.147);

2)вероятность того, что отклонение нормальной случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине не превышает e , т.е.

$$P(|X - a| < e) = 2\Phi\left(\frac{e}{s}\right);$$

3) вероятность того, что абсолютная величина отклонения нормальной случайной величины от ее математического меньше, чем 3 s , равна 0,9973, т.е. близка к 1 (это так называемое **правило трех сигм**).

Пример 14. Диаметр детали - нормальная случайная величина с математическим ожиданием 50мм (если нет систематических ошибок, то это проектный размер диаметра) и средним квадратическим отклонением 9мм. Установить:

а) вероятность того, что наудачу взятая деталь имеет диаметр в пределах от 40 до 70 мм ;

б) вероятность того, что размер диаметра наудачу взятой детали отличается от математического ожидания не более, чем на 20 мм ;

в) в каких границах следует ожидать размер диаметра детали, чтобы вероятность не выйти за эти границы была равна 0,95.

Решение .

а) Пусть случайная величина X - диаметр детали. Тогда

$$P(a < X < b) = \Phi(\frac{b-a}{s}) - \Phi(\frac{a-a}{s}) = P(40 < X < 70) = \Phi(\frac{70-50}{9}) - \Phi(\frac{40-50}{9}) =$$

$$= \Phi(2{,}22) - \Phi(-1{,}11) = 0{,}4867 - (-0{,}3664) = 0{,}9734.$$

Здесь учтено, что функция Лапласа Ф(x) - нечетная, т.е. Ф(-x)= - Ф(x);

б) $P(|X - a| < e) = 2\Phi\left(\frac{e}{s}\right) = P(|X - 50| < 20) = 2\Phi\left(\frac{20}{9}\right) = 2\Phi(2{,}22) =$

= 2·0,4867 = 0,9734.

в) Воспользуемся формулой вероятности отклонения нормальной случайной величины от ее математического ожидания на заданную величину. Для данной задачи $P(|X - 50| < e) = 2\Phi\left(\frac{e}{9}\right)$ и неизвестной величиной является искомое отклонение размера диаметра e . С учетом, что вероятность этого отклонения задана (она равна 0,95), имеем

$2\Phi\left(\frac{e}{9}\right)=0{,}95.$ Откуда $\Phi\left(\frac{e}{9}\right)=0{,}475.$ Используя таблицы функций Лапласа, получаем, что значению функции 0,475 соответствует значение аргумента 1,96. Таким образом , $\frac{e}{9}=1{,}96.$ Следовательно,с вероятностью 0,95 отклонение диаметра составит e =1,96 · 9=17,6мм.

3.ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ВАРИАНТ 1

1.Производится два выстрела по мишени. Опишите пространство элементарных исходов для этого опыта. Каким является событие, равное сумме приведенных Вами событий? Какими являются события, равные пересечению любых двух из приведенных Вами?

2.Каждая из букв А,Г,Н,О,Р,Ы написана на одной из шести карточек, из которых наудачу выбирают четыре. Какова вероятность, что в результате последовательного выбора наугад карточек получится слово “ГОРЫ”?

3.Наугад указывается число и месяц невысокосного года. Какова вероятность того, что это будет воскресенье, если всего в этом году 53 воскресенья, а соответствие чисел дням недели неизвестно?

4.Вероятность того, что стрелок при стрельбе по мишени выбьет 10 очков, равна 0,4, 9 очков - 0,2, 8 - 0,2, 7 - 0,1, 6 или меньше - 0,1. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет не менее девяти очков.

5.Участковый врач обслуживает на дому троих больных. Вероятность того, что в течение суток врач потребуется первому больному равна 0,1, второму - 0,5, третьему - 0,3. Найти вероятность того, что в течение суток: а) ни один больной не вызовет врача; б) хотя бы один больной вызовет врача; в) только один больной вызовет врача.

6.Три стрелка производят по одному выстрелу по мишени, вероятности попадания в которую у первого стрелка 0,5, у второго - 0,7, у третьего - 0,8. Найти вероятность двух попаданий в мишень.

7.Сборщик получил три коробки деталей, изготовленных заводом №1, и две коробки деталей, изготовленных заводом №2. Вероятность того, что деталь завода №1 стандартна, равна 0,8, а для завода №2 - 0,9. Сборщик извлек деталь из наудачу взятой коробки. Найти вероят-ность того, что извлечена бракованная деталь.

8.Известно,что стандарту соответствует 98% ламп, изготовленных заводом №1, 96% - заводом №2 и 99% - заводом №3. В магазин поступило 150 ламп с завода №1, 60 - с завода №2 и 40 - с завода №3. Здесь они оказались в случайно образовавшемся порядке. Лампа, приобретен-ная покупателем, оказалась нестандартной. Найти вероятность того, что она изготовлена на заводе №2.

9.Вероятность выиграть по одному билету лотереи равна 1/6. Найти вероятность того, что не выиграют два билета из пяти.

10.На некотором предприятии доля брака составляет в среднем 1,5%. Какова вероятность того, что в партии из 400 деталей окажется два бракованных изделия?

11.Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности не более, чем на 0,02.

12.Составить закон распределения вероятностей числа появлений события А в трех независимых испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

13.Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью f(x), причем

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}, & |x|<a,\\ 0, & |x|\ge a.\end{cases}$$

Требуется найти: а) постоянную a; б) функцию распределения F(x); в) вероятность попадания случайной величины в интервал $(\frac{a}{2}, a)$.

14.Случайная величина X задана интегральной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4}, & -1<x\le\dfrac{1}{3},\\ 1, & x>\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

Требуется: а) найти плотность вероятности f(x); б) математическое ожидание и дисперсию случайной величины; в) построить графики функций F(x) и f(x).

15.Случайная величина X подчинена нормальному закону с M(x)=0. Вероятность ее попадания в интервал (-2, 2) равна 0,5. Найти дисперсию этой случайной величины и записать ее дифференциальную функцию распределения.

ВАРИАНТ 2

1.Рабочий изготовил 5 деталей. Пусть событие A_i(i=1,2,3,4,5) заключается в том, что i-тая деталь имеет дефект. Записать событие, заключающееся в том, что: а) ни одна из деталей не имеет дефекта; б) дефекты имеют не более одной детали.

2.Контролю подлежит 250 деталей, из которых 5 нестандартных. Найти вероятность того, что из двух наудачу взятых деталей одна окажется нестандартной.

3.Одновременно бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что: а) сумма выпавших очков равна 8; б) произведение выпавших очков равно 8.

4.В лотерее 100 билетов. Среди них один выигрывает 60 рублей, три - по 25 рублей, шесть - по 10 рублей, пятнадцать - по 3 рубля. Некто покупает один билет. Найти вероятность какого-нибудь выигрыша.

5.Вероятность того, что в течение дня произойдет неполадка стан-ка, равна 0,03. Какова вероятность того, что в течение четырех дней подряд не произойдет ни одной поломки этого станка?

6.Два стрелка по очереди стреляют в одну мишень. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,25. Каждый стрелок имеет право произвести два выстрела, однако стрельба прекращается, если кто-нибудь из них попадает в мишень. Определить вероятность поражения мишени каждым из этих стрелков в отдельности.

7.На складе готовой продукции находится пряжа, изготовленная двумя цехами фабрики, причем 20% пряжи составляет продукция цеха №1, а остальная - продукция цеха №2. Продукция цеха №1 содержит 90%, а цеха №2 - 70% пряжи первого сорта. Взятый наудачу со склада моток пряжи оказался первого сорта. Определить вероятность того, что этот моток является продукцией цеха №2.

8.Стрельба производится по пяти мишеням типа А, трем - типа В, двум - типа С. Вероятность попадания в мишень типа А равна 0,4, типа В -0,1, типа С - 0,15. Найти вероятность попадания в мишень при одном выстреле, если неизвестно, в мишень какого типа он будет произведен.

9.В урне 30 шаров: 20 белых и 10 черных. Вынули подряд четыре шара, причем каждый из них возвращался в урну перед извлечением следующего. Найти вероятность того, что среди вынутых четырех шаров будет два белых.

10. Найти вероятность того, что среди 200 человек окажется четверо левшей, если в среднем левши составляют 1%.

11.В некоторой стране 10% населения пользуются услугами общественного транспорта. Определить вероятность того, что из 900 человек не менее 30 и не более 110 человек пользуются услугами общественного транспорта.

12.Случайная величина X характеризуется следующим рядом распределения

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,2	0,4	0,3	0,08	?

Найти функцию распределения этой случайной величины, постро-ить ее график, вычислить математическое ожидание и дисперсию.

13.Функция распределения случайной величины **X** имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{при } x < -3, \\ \dfrac{x}{2} + \arcsin\dfrac{x}{3}, \text{при } -3 \le x \le 3, \\ 1, \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Найти дифференциальную функцию распределения и вероятность попадания случайной величины X в интервал (0, 1).

14.Плотность вероятности случайной величины имеет вид $f(x)=Ae^{-x}$ при $x \ge 0$ и $f(x)=0$ при $x<0$. Найти коэффициент A, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

15.Результаты измерения расстояния между двумя населенными пунктами подчиняются нормальному закону распределения с параметрами M(X)=16км и $s(X) =$ 100м. Найти вероятность того, что расстояние между этими пунктами не менее 16,3км и не более 17,75км.

ВАРИАНТ 3

1.Из множества супружеских пар выбирается наугад одна пара. Событие A - мужу больше 30 лет, событие B - муж старше жены, событие C -жене больше 30 лет. Выяснить смысл событий $A+C, AC, A\bar{B}C, ABC.$

2.Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что вытянутый им билет, содержащий два вопроса, будет состоять из подготовленных им вопро-сов?

3.В кармане имеется несколько монет достоинством 2коп и 10коп (наощупь не различимые). Известно, что двухкопеечных монет втрое больше, чем гривенников. Наугад вынимается одна монета. Какова вероятность того, что это будет гривенник ?

4.Из колоды в 52 карты выбираются наугад четыре карты. Какова вероятность того, что среди них окажется хотя бы один туз?

5.В первом ящике 6 шаров: один белый, два красных, три синих. Во втором ящике 12 шаров: два белых, шесть красных и четыре синих. Из каждого ящика выбирается по одному шару. Какова вероятность того, что среди них нет синих шаров?

6.Рабочий обслуживает четыре станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,7. У второго станка она равна 0,4, у третьего - 0,4, у четвертого - 0,3. Найти вероятность того, что в течение часа: а) ни один станок не потребует внимания рабочего; б) хотя бы один станок потребует внимания рабочего; в) только один станок потребует внимания рабочего.

7.В первом ящике 20 деталей,из которых 15 стандартных. Во вто-ром среди 30 деталей 24 стандартных, в третьем 10 деталей, из кото-рых 6 стандартных. Какова вероятность того, что наудачу извлеченная из наудачу взятого ящика деталь, окажется стандартной.

8.На конвейер поступают однотипные детали, изготовляемые двумя рабочими. При этом первый рабочий поставляет 60%, а второй - 40% общего числа изделий. Вероятность того, что изделие, изготовленное первым рабочим, окажется нестандартным равна 0,002, вторым - 0,01. Взятое наудачу с конвейера изделие оказалось нестандартным. Определить вероятность того, что оно изготовлено: а) первым рабочим; б) вторым рабочим.

9.Пусть вероятность того, что покупателю необходима обувь 41-го размера, равна 0,2. Какова вероятность того, что из пяти первых покупателей двум будет необходима обувь этого размера?

10.Вероятность производства бракованной детали равна 0,008. Найти вероятность того, что из 500 деталей бракованных будет не менее 5 и не более10 деталей.

11.Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Найти вероятность 100 попаданий при 320 выстрелах.

12.Закон распределения количества очков, выбиваемых первым стрелком при одном выстреле, даётся таблицей 1, а для второго стрел-ка - таблицей 2.

Таблица 1

x_i	0	2	3
p_i	0	0,2	0,8

Таблица 2

y_i	1	2	3
p_i	0,2	0,3	0,5

Найти закон распределения и математическое ожидание суммы очков, выбитых обоими стрелками при одновременном выстреле.

13.Задана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \quad x<0, \\ A(1-\cos 2x), \quad 0\le x\le \dfrac{p}{2}, \\ 1, \quad x>\dfrac{p}{2}. \end{cases}$$

Найти коэффициент А, дифференциальную функцию распределения, вероятность $P\left(0\le x\le \dfrac{p}{4}\right)$, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

14.Случайная величина Х подчинена показательному закону распределения с параметром a: $f(x)=\begin{cases} ae^{-ax}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$.Требуется: а) построить кривую распределения (график $y=f(x)$) б) найти функцию распределения; в) найти вероятность того, что случайная величина примет значение меньшее, чем ее математическое ожидание.

15.Х - нормальная случайная величина с $s(X)$=0,4. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине будет меньше 0,3.

ВАРИАНТ 4

1.Два шахматиста играют одну партию. Опишите структуру пространства элементарных событий этого опыта. Каким событием является сумма названных Вами событий?

2.На каждые 100 деталей приходится 3% бракованных. Наугад выбирается три детали. Найти вероятность того, что среди них будет одна бракованная.

3.Из партии, в которой 31 деталь без дефектов и 6 с дефектами, берут наудачу 3 детали. Найти вероятность того, что: а) все три детали без дефектов; б) дефект имеет только одна из трех взятых деталей .

4.Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,8, вторым - 0,7. Найти вероятность того, что хотя бы один из них попал в цель.

5.Охотник выстрелил три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0,8, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найти вероятность того, что он: а) промахнется все три раза; б) попадет два раза; в) попадет хотя бы один раз.

6.Из цифр 1,2,3,4,5 выбирается наудачу одна, а из оставшихся-другая. Найти вероятность того, что будет выбрана нечетная цифра: а) первый раз; б) второй раз; в) оба раза.

7.В телеателье имеется 4 кинескопа. Вероятность того, что кинес-коп выдержит гарантийный срок службы для каждого из них соответ-ственно равна 0,8, 0,85, 0,9 и 0,95. Найти вероятность того, что взятый наудачу кинескоп выдержит гарантийный срок службы.

8.Известно, что 96% выпускаемой продукции стандартны. Упрощенная схема контроля признает годной стандартную продукцию с вероятностью 0,98, а бракованную - с вероятностью 0,05. Определить вероятность того, что изделие, признанное на контроле годным, является стандартным.

9.Ожидается прибытие трех судов с бананами. В 1% случаев груз (бананы) портится в дороге. Найти вероятность того, что два судна придут с испорченным грузом .

10.Вероятность неточной сборки прибора равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 500 приборов точных окажется от 410 до 430 (включительно).

11.Рыболовный траулер сдает на плавбазу 5000 банок солёной сельди. Вероятность того, что при сдаче банка сельди будет повреждена, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу будет сдано 5 поврежденных банок.

12.В таблице дан закон распределения случайной величины X:

x_i	2	4	5	6	8	9
p_i	0,2	0,25	0,3	0,1	0,1	?

Найти функцию распределения, построить ее график, вычислить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

13. Случайная величина X задана дифференциальльной функцией распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -\dfrac{p}{2},\\ A\cos x, & |x|<\dfrac{p}{2},\\ 0, & x\ge \dfrac{p}{2}.\end{cases}$$

Найти коэффициент A, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

14.Случайная величина X задана интегральной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{36}, & 0<x\le 6,\\ 1, & x>6.\end{cases}$$

Найти дифференциальную функцию распределения $f(x)$. Вычислить $P(0 \leq X \leq 4)$ и $P(4 \leq X \leq 6)$. Построить графики функций $F(x)$и $f(x)$.

15.Нормальная случайная величина X имеет M(X)=6 и s (X)=2. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величи-на примет значение в промежутке (4,8).

ВАРИАНТ 5

1.События А - хотя бы один из трех проверяемых приборов бракованный и В - все приборы доброкачественные. Что означают события А+В и АВ ?

2.Каждая из букв м,е,р,о написана на одной из четырех карточек. Карточки перемешиваются и раскладываются наугад. Найти вероятность того, что в результате получится слово море.

3.Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что: а) на обеих костях выпадет одинаковое число очков; б) выпадет разное число очков.

4.В урне 5 черных и 6 белых шаров. Случайным образом вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что среди них оказалось: а) два белых шара; б) хотя бы один белый шар.

5.Пусть вероятность того, что покупателю понадобится обувь 42-го размера, равна 0,25. Найти вероятность того, что из четырех первых покупателей обувь этого размера: а) никому не понадобится; б) понадобится хотя бы одному.

6.В семье трое детей. События, состоящие в рождении мальчика и девочки, принимаем равновероятными. Найти вероятность того, что в этой семье: а) все мальчики; б) дети одного пола.

7.В двух ящиках имеются радиолампы. В первом ящике содержится 12 ламп, из которых одна нестандартная. Во втором-10 ламп, из них две нестандартных. Из первого ящика наудачу взятая лампа переложена во второй ящик. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная после этого из второго ящика, будет нестандартной.

8.В монтажном цехе к устройству присоединяется двигатель. Двигатели поставляются двумя заводами. На складе имеется 19 двигателей первого завода и 6 - второго. Рабочий берет случайно один из двигателей и монтирует его к усройству. Найти вероятность того, что смонтированный и безотказно работающий двигатель изготовлен первым заводом, если безотказно работать до конца гарантийного срока двигатель с первого завода может с вероятностью 0,85, а со второго- с вероятностью 0,76.

9.Пусть всхожесть семян данного растения составляет 90%. Найти вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдет не менее трех.

10.Вероятность оплаты в кассе выписанного у продавца чека равна 0,99. Найти вероятность того, что из 100 выписанных чеков хотя бы один окажется неоплаченным.

11.Радиотелеграфная станция принимает цифровой текст. В силу наличия помех вероятность ошибочного приема любой цифры не меняется в течение всего времени и равна 0,01. Считая приемы отдельных цифр независимыми, найти вероятность того, что в тексте, содержащем 1100 цифр, будет ровно 7 ошибок.

12.Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	1	2	3
p_i	?	0,1	0,7

Найти функцию распределения случайной величины $Y=X^2$, построить ее график, вычислить математическое ожидание и дисперсию.

13.Случайная величина X задана интегральной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le \dfrac{p}{2}, \\ 1-\sin x, & \dfrac{p}{2} < x \le p, \\ 1, & x > p. \end{cases}$$

Требуется: а) найти плотность распределения; б) найти математическое ожидание и дисперсию; в) построить графики дифференциальной и интегральной функций распределения этой случайной величины.

14.Случайная величина X имеет плотность $f(x)=\dfrac{A}{1+x^2}$. Найти коэффициент A, интегральную функцию распределения и вероятность $P(-1<X<1)$.

15.Валики, изготовляемые автоматом, считаются стандартными, если отклонение диаметра валика от проектного размера не превышает 2мм. Случайные отклонения размера диаметра валика подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением 1,6мм и математическим ожиданием равным нулю. Сколько процентов стандартной продукции изготовляет автомат?

ВАРИАНТ 6

1.Из таблицы случайных чисел наудачу взято одно число. Событие А - выбранное число делится на 5; событие С - данное число заканчивается нулем. Что означают события А-С ,$A\overline{C}$? Справедливы ли для этих событий соотношения А+С= С и А+С=А?

2.Группа из 10 мужчин и 10 женщин делится случайным образом на две равные части. Найти вероятность того, что в каждой части мужчин и женщин поровну.

3.При записи фамилий членов собрания, общее число которых 360, оказалось, что начальной буквой у семи была А, у пяти - Е, у восьми - И, у девяти - О, у четырех - У, у двух - Ю, а у всех остальных фамилия начиналась с согласной буквы. Найти вероятность того, что фамилия члена данного собрания начинается с согласной буквы.

4.Вероятностьтого, что на билет денежно-вещевой лотереи выпадет денежный выигрыш, равна 0,012. Вероятность вещевого выигрыша - 0,008. Найти вероятность того, что на один купленный билет выпадет какой-либо выигрыш.

5.В электрическую цепь включены последовательно три прибора, не взаимодействующие друг с другом. Вероятность выхода из строя одного из них равна 0,1, второго - 0,2 и третьего - 0,15. Определить надежность работы электрической цепи (т.е. вероятность невыхода ее из строя), если цепь выключается, как только испортится хотя бы один прибор.

6.Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены потребует его внимания первый станок равна 0,7, второй - 0,75, третий - 0,8. Найти вероятность того, что в течение смены потребуют внимания рабочего какие-либо два станка.

7.Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, переложили два, взятые наугад шара, в урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Найти вероятность того, что после этого из второй урны можно вынуть белый шар.

8.Первое орудие четырехорудийной батареи пристрелено так, что вероятность попадания равна 0,3; остальным трем орудиям соответствует вероятность попадания 0,2. Для поражения цели достаточно одного попадания. Два орудия произвели одновременно по выстрелу, в результате чего цель была поражена. Найти вероятность того, что первое орудие стреляло.

9.Вероятность выиграть по одному билету лотереи равна 1/7. Какова вероятность, имея шесть билетов, выиграть по трем билетам?

10.В цехе 9 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что в данный момент он включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент включено не менее трех и не более семи моторов.

11.Школа принимает в первые классы 200 детей. Найти вероятность того, что среди них окажется 100 девочек, если вероятность рождения мальчика 0,515.

12.Независимые величины Х и У заданы таблицами распределения:

x_i	-1	0	1
p_i	0,2	0,3	?

y_i	0	1	2	3
p_i	?	0,2	0,3	0,4

Составить ряд распределения случайной величины Z=XY, найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

13. Случайная величина Х задана интегральной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 1-\cos x, & 0<x\le \frac{p}{2}, \\ 1, & x>\frac{p}{2}. \end{cases}$$

Найти дифференциальную функцию распределения $f(x)$. Вычислить $P(0\le X\le \frac{p}{4})$ и $P(\frac{p}{4}\le X\le \frac{p}{2})$.

14.Плотность вероятности случайной величины Х имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2, & 0\le x\le 4, \\ 0, & x<0, x>4. \end{cases}$$

Требуется: а) найти коэффициент a, б) найти функцию распределения F(x), в) построить графики функций F(x) и $f(x)$; г) вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины Х.

15.Рост взрослых мужчин является нормальной случайной величиной. Пусть ее математическое ожидание равно 170 см, а дисперсия 36 см^2. Вычислить вероятность того, что хотя бы один из наугад выбранных четырех мужчин будет иметь рост от 168 до 172см.

ВАРИАНТ 7

1.Машинно-котельная установка состоит из двух котлов и одной машины. Событие A-исправна машина, событие $B_k\ (k=1,2)$ - исправен k-тый котел, событие C – машинно-котельная установка работоспособна, что будет в том случае, если исправны машина и хотя бы один котел. Выразить события C и $\overline{C}$ через A, B_1, B_2.

2.Четырехтомное сочинение расположено на полке в случайном порядке. Найти вероятность того, что тома расположены в должном порядке справа налево или слева направо.

3.В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из эта-жей, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий: А - все пассажиры выйдут на четвертом этаже; В - все пассажиры выйдут одновременно.

4.Процесс изготовления детали состоит из нескольких операций. После первой и второй операций производится контроль качества и при обнаружении брака деталь отбрасывается. Вероятность детали быть отбракованной после первой операции равна 0,02, а после второй - 0,1. Определить вероятность того, что деталь будет отбракована до треть-ей операции.

5.Два стрелка производят в мишень по одному выстрелу. Вероятность попадания для одного стрелка равна 0,7, для второго - 0,8. Найти вероятность того, что попадут в цель: а) оба стрелка; б) только один стрелок ; в) ни один стрелок.

6.Рабочий обслуживает четыре станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,3, второй - 0,4, третий - 0,7 и четвертый - 0,6. Найти вероятность того, что в течение часа: а) ни один станок не потребует внимания рабочего; б) хотя бы один станок потребует внимания рабочего.

7.На сборку поступило 3000 деталей с первого автомата и 2000 со второго. Первый автомат дает 0,2% брака, второй - 0,3%. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь оказалась бракованной.

8.В первом ящике находятся два белых и три черных шара, во втором - четыре белых и три черных и в третьем - шесть белых и два черных шара. Предполагая извлечение шара из любого ящика равновероятным, найти вероятность того, что извлечение было произведено из первого ящика, если вынутый шар оказался белым.

9.Вероятность того, что март будет снежным равна 0,45. Найти вероятность того, что в течение пяти лет март ровно три раза будет снежным.

10.Вероятность допущения дефекта при производстве механизма равна 0,4. Случайным образом отбираются 500 механизмов. Найти вероятность того, что среди них с дефектом не менее 30 и не более 40.

11.Вероятность изготовления консервной банки с недостаточной герметизацией равна 0,002. Среди скольких банок, отобранных случайным образом, можно с вероятностью 0,9 ожидать отсутствие бракованных?

12.Найти закон распределения случайной величины X, которая выражает число мальчиков в семье, имеющей пять детей, если вероятность рождения мальчика равна 0,515. Определить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

13.Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, если ее плотность вероятности $f(x)=\frac{2}{p}\cos^2 x$ на интервале $\left]-\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right[$ и $f(x)=0$, если $|x|\geq\frac{p}{2}$.

14. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\leq\frac{3}{2}p, \\ a\cos x, & \frac{3}{2}p<x\leq 2p, \\ 1, & x>2p. \end{cases}$$

Найти коэффициент a, дифференциальную функцию распределения, $P\left(\frac{p}{4}<x<\frac{7}{4}p\right)$ и построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

15.Случайная величина X распределена по нормальному закону с M(X)=40 и $s(X)=10$. Найти вероятность того, что X примет значение в промежутке [20,60].

ВАРИАНТ 8

1.Пусть A, B, C - три произвольных события. Найти выражение событий, состоящих в том, что из A, B, C :а) произошло только событие A б) не произошло ни одно событие; в) произошло не более двух событий.

2.Для уменьшения общего количества игр на соревнованиях 16 команд разбиты на две подгруппы (по 8 команд в каждой). Найти вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся в разных подгруппах.

3.Общество из n человек садится за круглый стол. Найти вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом.

4.Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятность того, что произведение выпавших очков будет четным.

5.При штамповке пластмассовых тарелок брак составляет в среднем 2% общего числа изделий. 95% годных изделий составляет продукция первого сорта. Найти вероятность того, что взятая наудачу изготовленная тарелка окажется первого сорта.

6.Из трех орудий произвели залп по цели. Вероятность попадания при одном выстреле из первого орудия равна 0,8; для второго и треть-его орудия эти вероятности равны соответственно 0,7 и 0,9. Найти вероятность того, что: а) только один снаряд попадет в цель; б) все три снаряда попадут в цель.

7.Две перфораторщицы набили по одинаковому комплекту перфокарт. Вероятность того, что первая перфораторщица допустит ошибку, равна 0,05. Для второй перфораторщицы эта вероятность равна 0,1. При сверке перфокарт была обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошиблась первая перфораторщица.

8.На распределительной базе находятся электрические лампочки, произведенные двумя заводами. Из них 70% произведено первым заводом, 30%- вторым. Известно, что из каждых 100 лампочек, произведенных первым заводом, 90 удовлетворяют стандарту, а из 100 лампочек второго завода стандартны 80. Найти вероятность того, что взятая наудачу с базы лампочка удовлетворяет стандарту.

9.Вероятность выиграть по одному билету лотереи равна 0,1. Какова вероятность, имея четыре билета, выиграть: а) по одному биле-ту; б) ни по одному билету; в) хотя бы по одному билету.

10.Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти вероятность того, что событие наступит 20 раз в 100 испытаниях.

11.Установлено, что 0,5% шариков, изготовляемых для подшипников, оказываются бракованными. Найти вероятность того, что из поступивших на калибровку 1000 шариков бракованных будет не менее 40 и не более 50 штук.

12. В таблице дан закон распределения случайной величины X:

x_i	2	6	10
p_i	0,5	?	0,1

Найти функцию распределения, построить ее график, вычислить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

13.Плотность вероятности случайной величины X задана следующим образом

$$f(x) = \begin{cases} ax, & 0 \le x \le 2, \\ 0, & x < 0, x > 2. \end{cases}$$

Требуется: а) найти коэффициент a, б) найти функцию распределения F(x), в) вычислить вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания будет не более 0,5.

14. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 2p, \\ \sin x, & 2p < x < \frac{5}{2}p, \\ 1, & x > \frac{5}{2}p. \end{cases}$$

Найти дифференциальную функцию распределения, $P\left(\frac{p}{4} < x < \frac{9}{4}p\right)$ и построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

15.Рост взрослой женщины является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Ее математическое ожидание равно 164 см, а среднее квадратическое отклонение - 5,5 см. Найти плотность вероятности этой случайной величины и вычислить вероятность того, что хотя бы одна из пяти наудачу взятых женщин имеет рост в пределах от 163 до 165 см.

ВАРИАНТ 9

1.Игральная кость брошена один раз. Событие А - появление на верхней грани не менее трех очков, событие В - появление не более четырех очков. Образуют ли события А и В пространство элементарных событий? Опишите событие АВ.

2.Из отдела,в котором работают 10 инженеров, 5 техников и 3 лаборанта, нужно выделить на дежурство 5 человек. Чему равна вероят-ность того, что будут выделены 2 техника, один лаборант и 2 инженера?

3.Определить вероятность того, что выбранное наудачу число даст число, оканчивающееся единицей при: а) возведении в квадрат; б) возведении в четвертую степень.

4.В электрическую цепь последовательно включены приборы А и В, не взаимодействующие друг с другом. Вероятность выхода из строя прибора А равна 0,1, а прибора В - 0,2. Цепь выключается , если выходит из строя хотя бы один прибор. Определить вероятность выхода из строя цепи.

5.Производится бомбардирование военного объекта. Вероятность попадания в цель при сбрасывании бомбы равна 0,7, а вероятность того, что бомба не взорвется, равна 0,08. Найти вероятность того, что будет разрушен, если будет сброшена одна бомба.

6.Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор, равна 0,95. Для второго сигнализатора эта вероятность равна 0,9. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

7.В первой коробке содержится 20 транзисторов, из которых 18 стандартных. Во второй коробке - 10 транзисторов, из них 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взят транзистор и переложен в первую. Найти вероятность того, что транзистор, наудачу извлеченный затем из первой коробки, будет стандартным.

8.Сборщик получает в среднем 50% деталей завода №1, 30% - завода №2 и 20% - завода №3. Вероятность того, что деталь первого завода отличного качества равна 0,7. Для второго и третьего заводов эти вероятности равны соответственно 0,8 и 0,9. Наудачу взятая сборщиком деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена заводом №1.

9.Вероятность выиграть по одному билету лотереи равна 1/6. Какова вероятность не выиграть по двум билетам из пяти?

10.На некотором предприятии доля брака составляет в среднем 1,5%. Найти вероятность того, что в партии, состоящей из 400 изделий, окажется два бракованных.

11.Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности не более, чем на 0,02.

12.Составить закон распределения вероятностей числа появлений события А в трех независимых испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

13. Плотность вероятности случайной величины X задана следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a. \end{cases}$$

Требуется: а) найти коэффициент a, б) найти функцию распределения F(x), в) вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал $]\frac{a}{2}, a[$.

14. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -1, \\ \frac{3}{4}x+\frac{3}{4}, & -1 < x < \frac{1}{3}, \\ 1, & x \ge \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Требуется: а) найти плотность распределения; б) найти математическое ожидание и дисперсию; в) построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

15.Случайная величина Х подчинена нормальному закону с М(Х)=0. Вероятность ее попадания в интервал]-2, 2[равна 0,5. Найти диспер-сию этой случайной величины и записать ее дифференциальную функ-цию распределения.

ВАРИАНТ 10

1.Производится наблюдение за группой из четырех однородных объектов. Каждый из них за время наблюдений может быть обнаружен или не обнаружен. Рассматриваются события: А - обнаружен только один из четырех объектов, В - обнаружен хотя бы один объект, С - обнаружено не менее двух объектов, Д - обнаружены ровно два объекта, Е - обнаружены ровно три объекта, F - обнаружены все четыре объекта. Указать, в чем состоят события А+В, АВ, Д+Е+F. Совпадают ли события ВС и Д ?

2.В пруду находятся 800 осетров и 500 стерлядей. Какова вероятность того, что две подряд выловленные рыбы окажутся разных видов ?

3.Случайно выбранная кость домино оказалась не дублем. Найти вероятность того, что вторую также взятую наудачу кость домино можно приставить к первой.

4.Бросаются две монеты. Рассматриваются события : А - выпадение герба на первой монете, В - выпадение герба на второй монете. Найти вероятность события С= А + В. В чем состоит это событие ?

5.Для некоторой местности среднее число дождливых дней в августе равно 11. Чему равна вероятность того, что первые два дня августа будут дождливыми ?

6.Предположим, что для одной торпеды вероятность потопить корабль равна 1/2. Найти вероятность потопления корабля, если в него одновременно было выпущено 4 торпеды.

7.На заводе работают 20 станков одинаковой производительности. Из них 10 станков марки А, 6 - марки В и 4 - марки С. Вероятность того, что качество детали будет отличным, для этих станков соответственно равна 0,9 , 0,8 и 0,7. Какой процент отличных деталей выпускает цех в целом ?

8.В группе спортсменов 10 лыжников,12 велосипедистов и 13 бегунов. Вероятность выполнения квалификационной нормы для лыжника p_1=0,9, для велосипедиста p_2=0,8 и для бегуна - p_3=0,75. Пришло сообщение,что один из спортсменов выполнил норму. К какой из групп вероятнее всего он принадлежал ?

9.Вероятность хотя бы одного попадания при двух выстрелах равна 0,96. Найти вероятность трех попаданий при четырех выстрелах.

10.На некотором предприятии доля брака составляет в среднем 1%. Какова вероятность того, что в партии, состоящей из 300 изделий, окажется 4 бракованных изделия ?

11.Вероятность появления события А в каждом из 700 независимых испытаний равна 0,35. Найти вероятность того, что событие А происходит : а) ровно 270 раз; б) меньше 270 и больше 230 раз.

12.Бросают три монеты. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины Х - числа выпадений “герба”. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

13.Плотность вероятности случайной величины Х $f(x) = Ax^2e^{-2x}$, $(0 \le x \le \infty)$. Найти коэффициент A, построить интегральную функцию распределения и определить вероятность попадания этой случайной величины в интервал]0, 1/2[.

14. Случайная величина Х задана интегральной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{36}, & 0 < x \le 6, \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

Требуется: а) найти вероятность принятия этой случайной величиной значения в интервале]1, 7[; б) найти плотность распределе-ния вероятности случайной величины; в) найти ее математическое ожидание и дисперсию; г) построить графики интегральной и дифферен-циальной функций распределения.

15.Дана нормальная случайная величина Х с М(Х)=0 и s (Х)=2. Найти вероятность того, что эта случайная величина примет значение : а) в интервале]-1, 2[; б) меньшее -1; в) большее 2; г) отличающееся от М(Х) по абсолютной величине не больше, чем на 1.

ВАРИАНТ 11

1.Игральная кость бросается один раз. Рассматриваются события:А - появление на верхней грани не менее трех очков, В - не более четырех очков. Равновозможны ли эти события? Совместны ли они? Описать события А+В и АВ.

2.В мастерскую поступили для ремонта 10 часов. Известно, что из них шесть нуждаются в общей чистке механизма. Мастер берет первые попавшиеся пять часов. Определить вероятность, что двое из них нуждаются в общей чистке механизма.

3.В колоде 36 карт четырех мастей. После извлечения и возвращения опять в колоду одной карты все карты перемешиваются и снова извлекается одна карта. Определить вероятность того, что обе извлеченные карты одной масти.

4.Покупатель приобрел пылесос и полотер. Вероятность того, что пылесос не выйдет из строя в течение гарантийного срока, равна 0,95. Для полотера эта вероятность равна 0,94. Найти вероятность того, что хотя бы один из этих приборов выдержит гарантийный срок.

5.Производится стрельба по некоторой цели, вероятность попадания в которую при одном выстреле равна 0,2. Стрельба прекращается при первом попадании. Найти вероятность того, что будет произведено ровно шесть выстрелов.

6.Экспедиция отправила газеты в два почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в каждое из отделений почты рав-на 0,9. Найти вероятность того, что: а) оба почтовых отделения получат газеты вовремя; б) хотя бы одно отделение получит газеты вовремя.

7.У рыбака имеется три излюбленных места для ловли рыбы, которые он посещает с равной вероятностью. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюет с вероятностью p_1, на втором месте - с вероятностью p_2, на третьем - p_3. Известно, что рыбак, выйдя на ловлю рыбы, закинул удочку и рыба клюнула. Найти вероятность того, что он удил рыбу на первом месте.

8.В трех урнах имеются белые и черные шары. В первой урне - три белых и один черный шар, во второй - 6 белых и 4 черных, в третьей - 9 белых и один черный. Из наугад выбранной урны извлекается случайным образом шар. Найти вероятность того, что он белый.

9.Посажено 600 семян кукурузы. Вероятность прорастания одного зерна равна 0,9. Найти вероятность того, что прорастет от 450 до 570 из посаженных зерен.

10.Принимая вероятность изготовления нестандартной детали 0,05, найти вероятность того, что из пяти взятых деталей четыре окажутся стандартными.

11.Прядильщица обслуживает 800 веретен. Вероятность обрыва нитки на одном веретене в течение одного часа равна 0,005. Найти вероятность того, что в течение часа нить оборвется не более, чем на трех веретенах.

12.Случайные величины X и У заданы таблицами распределения:

x_i	1	3	4	5
p_i	0.25	?	0,15	0,4

y_i	0	2	3
p_i	0,35	0,25	0,4

Составить закон распределения случайной величины Z=X+Y и проверить свойство математического ожидания суммы случайных величин.

13.Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<2,\\ (x-2)^2, & 2\le x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Найти: а) плотность вероятности $f(x)$; б) вероятность попадания в интервал]1; 2,5[; в) математическое ожидание и дисперсию случайной величины. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

14. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x>0, x>p,\\ a\sin x, & 0\le x\le p.\end{cases}$$

Требуется: а) найти коэффициент a, б) найти функцию распределения F(x), в) вычислить вероятность P($|X|\le\frac{p}{2}$).

15.Установлено, что диаметр изготовляемых поршней является нормальной случайной величиной со средним значением, равным 4 дюймам, и дисперсией, равной $3\cdot 10^{-3}$. Поршни с диаметром более 4,006 дюйма и менее 3,994 дюйма являются браком. Каков процент брака в изготовляемых партиях поршней?

ВАРИАНТ 12

1.По мишени производится три выстрела. Обозначим события A_i - попадание при i-том выстреле (i =1, 2, 3). Выразить через A_i и $\overline{A_i}$ следующие события: а) А - в мишень попали все три пули; б) В - имелся хотя бы один промах; в) С - было не менее двух попаданий.

2.Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

3.Лотерея выпущена на общую сумму n рублей. Цена одного билета r рублей. Ценные выигрыши падают на m билетов. Определить вероятность ценного выигрыша на один билет.

4.Из колоды в 36 карт наудачу выбирается 3 карты. Найти вероятность того, что среди них не более одного туза.

5.В урне a белых и b черных шаров. Из нее в случайном порядке вынули шар, а затем второй. Найти вероятность того, что второй вынутый шар был белый.

6.Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения мишени каждым из стрелков равна 0,8. Найти вероятность того, что: а) оба стрелка поразят мишень; б) оба стрелка промахнутся; в) только один стрелок поразит цель; г) хотя бы один стрелок поразит мишень.

7.В цехе три типа автоматических станков. Известно, что станок первого типа производит 90% деталей отличного качества, станок второго типа - 85%, третьего -80%. Все произведенные детали сдаются на склад. Найти вероятность того, что взятая со склада наудачу деталь окажется отличного качества, если станков первого типа 10 штук, второго - 8,третьего - 2, а производительность всех станков одинакова.

8.Сборщик получил две коробки одинаковых деталей, изготовленных заводом №1, и три коробки таких же деталей, изготовленных заводом №2. Из наудачу взятой коробки наудачу извлеченная сборщиком деталь оказалась стандартной. Что вероятнее: эта деталь изготовлена заводом №1 или №2?

9.Среди вырабатываемых рабочим деталей в среднем 4% брака. Найти вероятность того, что среди взятых для испытания пяти деталей одна бракованная.

10.По данным ОТК в среднем 2% изготавливаемых на заводе часов нуждаются в регулировке. Чему равна вероятность того, что из 300 изготовленных заводом часов 290 не будут нуждаться в регулировке?

11.Вероятность появления события в каждом из независимых опытов равна 0,64. Произведено 144 испытания. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности не более,чем на 0,04.

12.Дан закон распределения случайной величины X :

x_i	-2	0	1	3
p_i	0,1	?	0,3	0,1

Составить закон распределения случайной величины $Z = X^2$ и построить график функции распределения случайной величины Z .

13.Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = A + B\,arctg\frac{x}{2}.$$

Найти коэффициенты A и B, вероятность $P(|X| \le 2)$ и дифференциальную функцию распределения данной случайной величины.

14.Случайная величина X распределена на промежутке [0, 2] по закону Симпсона:

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1, \\ 2-x, & 1\le x<2. \end{cases}$$

Требуется: а) найти функцию распределения случайной величины и построить ее график ; б) найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

15.Результаты измерения расстояния между двумя объектами подчинены нормальному закону с M(X)=16 км и $s(X)$=100 м. Найти вероятность того, что расстояние между этими объектами не менее 15,65 км и не более 16,3 км.

ВАРИАНТ 13

1.Пусть A_1, A_2, A_3- некоторые события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из A_1, A_2, A_3: а) ни одно событие не произошло; б) произошло только событие A_3; в) произошло только одно событие; г) произошло не менее двух событий.

2.Ребенок играет с десятью буквами разрезной азбуки : А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово “математика”?

3.Десять друзей случайным образом садятся за круглый стол. Найти вероятность того, что два фиксированных лица А и В сядут рядом, причем В слева от А.

4. Найти вероятность того, что дни рождения трех человек придутся на разные месяцы (июнь, июль, август), если вероятности попадания дня рождения на данный месяц считаются равными для всех месяцев года.

5.Для повышения надежности работы электрической цепи параллельно подсоединены два дублирующих узла С и Д, не взаимодействующие друг с другом. Узлы присоединены так, что в цепи работает один из них и, как только он выходит из строя, автоматически включается другой. Определить надежность (вероятность не выхода из строя) цепи, если вероятность выхода из строя узла С равна 0,1, а узла В - 0,2.

6.В телестудии имеются три телекамеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) одна камера; б) хотя бы одна камера.

7.Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна равна 0,8, а второго - 0,9. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь из наудачу выбранного набора, стандартна.

8.На двух станках изготавливаются одинаковые валики. Вероятность изготовления валика высшего сорта на первом станке равна 0,92, а на втором - 0,85. Изготовленные на обоих станках валики находятся на складе в случайно образовавшемся порядке. При этом валиков, изготовленных на первом станке, в три раза больше. Взятый наудачу со склада валик, оказался высшего сорта. Найти вероятность того, что он изготовлен на первом станке.

9.Средний процент нарушений работы кинескопа телевизора в течение гарантийного срока равен 10%. Вычислить вероятность того, что из 10 наблюдаемых телевизоров 8 выдержат гарантийный срок.

10.Вероятность того, что абонент правильно наберет телефонный номер, принимается равной 0,999. Определить вероятность того, что среди 500 произведенных независимо один от другого вызовов, окажется менее двух ошибочных.

11.В хлопке 70% длинных волокон. Какова вероятность того, что среди взятых 20 волокон не более 10 длинных?

12.Случайная величина X имеет следующее распределение:

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,1	?	0,2	0,4	0,1

Найти функцию распределения этой случайной величины,построить ее график, вычислить математическое ожидание, дисперсию и P(|X|$\leq$1).

13.О случайной величине говорят, что она распределена по закону арксинуса,если плотность ее распределения равна

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{A}\right)^2}}, & |x|<A,\\ 0, & |x|\geq A.\end{cases}$$

Требуется найти константу A, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

14.Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<2,\\ (x-2)^2, & 2\leq x\leq 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Требуется: а) найти плотность распределения вероятности случайной величины; б) построить графики интегральной и дифференциа-льной функций распределения; в) найти $P(1\leq X\leq 2{,}5)$ и $P(2{,}5<X<3{,}5)$.

15.Процент содержания золы в угле является нормальной случайной величиной с математическим ожиданием, равным 16% и средним квадратическим отклонением, равным 4%. Определить вероят-ность того, что в наудачу взятой пробе угля будет от 12% до 24% золы.

ВАРИАНТ 14

1.Рабочий изготовил 3 детали. Пусть событие $A_i (i = 1,2,3)$ заключается в том, что i-тая изготовленная им деталь имеет дефект. Записать событие, заключающееся в том, что: а) хотя бы одна деталь имеет дефект; б)только одна деталь имеет дефект; в) все детали дефектные.

2.В шахматном турнире участвуют 20 человек, которые по жребию распределяются на две группы по 10 человек. Определить вероятность того, что 4 наиболее сильных шахматиста попадут по два в разные группы.

3.На десяти различных карточках написаны различные цифры от нуля до 9. Определить вероятность того, что наудачу образованное с помощью данных карточек двузначное число делится на 18.

4.При конвейерной сборке точного механизма рабочий должен установить в него определенную деталь. Деталь эту в определенных случаях приходится подгонять путем дополнительной обработки и пробных установок ее в механизм. Всего таких установок производится не более пяти. Вероятность того, что деталь будет установлена без подгонки с первой пробы, равна 0,38, а при подгонке со второй пробы - 0,26, с третьей - 0,20, с четвертой - 0,14 и с пятой - 0,02. Определить вероятность того, что для установки этой детали потребуется: а) более двух проб; б) нечетное число проб.

5.Многолетними наблюдениями установлено, что в данном районе статистическая вероятность сентябрьскому дню оказаться дождливым равна 1/3. Фермер должен в течение трех дней сентября выполнить определенную работу. Чему равна вероятность того, что ни один из этих дней не будет дождливым?

6.Четыре охотника договорились стрелять по дичи в определенной последовательности: следующий охотник производит выстрел лишь в случае промаха предыдущего. Вероятности попадания в цель каждым из охотников равны по 0,8. Определить вероятность того, что будет произведено: а) один выстрел; б) два выстрела; в) три выстрела; г) четыре выстрела.

7.В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму для лыжника равна 0,9, для велосипедиста - 0,8 и для бегуна -0,75. Найти вероятность того, что выбранный наудачу спортсмен выполнит норму.

8.Имеется 10 одинаковых урн, из которых в девяти находятся по 3 черных и 3 белых шара, а в одной - 5 белых и 1 черный шар. Из взятой наугад урны извлечен белый шар. Какова вероятность того, что шар извлечен из урны, содержащей 5 белых шаров.

9.На факультете 730 студентов. Вероятность рождения каждого студента в любой день года равна 1/365. Найти вероятность того, что найдется 3 студента с одним и тем же днем рождения.

10.Вероятность выиграть по одному билету лотереи 1/12. Найти вероятность того, что имея 5 билетов, можно выиграть: а) по одному билету; б) хотя бы по одному билету.

11.Вероятность наступления события в каждом из независимых опытов равна 0,8. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0,95 можно было ожидать отклонение относительной частоты появления события от его вероятности не более, чем на 0,02?

12.Найти закон распределения дискретной случайной величины X, которая может принимать только два значения: x_1 с вероятностью $p_1 = 0{,}6$ и x_2, причем $x_1 < x_2$, если М(X) = 4, а Д(X) = 6.

13.Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ l\left(4x - x^2\right), & 0 \le x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

При каком значении l эта функция может быть принята за плотность вероятности случайной величины X, определить при этом значении интегральную функцию распределения, вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

14.Функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ a + b\arcsin x, & -1 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Определить постоянные a и b, $P(-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2})$, найти дифференциальную функцию распределения $f(x)$, построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

15.Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 40, и дисперсией, равной 100. Вычислить вероятность попадания этой случайной величины в промежуток [30, 80].

ВАРИАНТ 15

1.Прибор состоит из двух блоков первого типа и трех блоков второго типа. События $A_к$ (к=1,2) - исправен к-тый блок первого типа, B_n (n=1,2,3)- исправен n-й блок второго типа. Прибор работает, если исправны хотя бы один блок первого типа и не менее двух блоков второго типа. Выразить событие С, означающее работу прибора ,через события $A_к$ и B_n .

2.На каждой из шести одинаковых карточек написаны одна из букв О, Т, М, Р, О, С. Карточки тщательно перемешивают. Найти вероятность того, что на четырех вынутых по одной (наугад) и расположенных в одну линию карточках можно прочесть слово “ТРОС”.

3. Определить вероятность того, что серия наудачу выбранной облигации не содержит одинаковых цифр, если номер серии может быть любым пятизначным числом, начиная с 00001.

4.Три охотника попадают в летящую утку с вероятностями 2/3, 3/4 и1/4. Все одновременно стреляют по пролетающей утке. Какова вероятность того, что утка будет подбита?

5.В цехе n моторов, включающихся и выключающихся независимо друг от друга. Вероятность того, что в данный момент мотор окажется выключенным для всех моторов одинакова и равна 0,1. Определить: а) вероятность того, что в данный момент окажется выключенным хотя бы один мотор (n=10); б) при каком количестве n моторов в цехе вероятность того, что в данный момент окажется выключенным хотя бы один мотор, будет не менее более 0,5.

6.Вероятность того, что данный спортсмен улучшит свой результат с одной попытки равна р. Найти вероятность того, что на соревнованиях спортсмен улучшит свой результат, если разрешается делать две попытки.

7.Брак в продукции завода вследствие дефекта А составляет 6%, причем в продукции, забракованной по признаку А в 4% случаев встречается и дефект В, а в продукции, свободной от дефекта А, дефект В встречается в 1% случаев. Найти вероятность того, что дефект В встретится в продукции.

8.Телеграфное сообщение состоит из сигналов “точка” и ”тире”. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений “точка” и 1/3 сообщений “тире”. Известно, что среди передаваемых сигналов “точка” и “тире” встречаются в соотношении 5:3. Найти вероятность того, что принят передаваемый сигнал, если принят сигнал “точка”.

9.В ОТК поступила партия изделий. Вероятность того, что наудачу взятое изделие стандартное, равна 0,9. Найти вероятность того, что из 100 проверенных изделий окажется стандартных не менее 84.

10. Найти вероятность того, что в четырех независимых испытаниях событие А наступит ровно три раза, зная, что в каждом испытании вероятность появления события А равна 0,7.

11.Вероятность изготовления шарика подшипника ниже третьего класса равна 0,0002. Найти вероятность того, что в партии из 500 таких шариков содержится хотя бы один ниже третьего класса.

12.Независимые случайные величины X и У заданы такими рядами распределения:

x_i	1	2	3
p_i	0,3	0,2	?

y_i	0	1	2	0,3
p_i	0,2	0,3	0,1	0,4

Составить ряд распределения случайной величины Z=XY и проверить на этих случайных величинах свойство математического ожидания произведения независимых случайных величин.

13.Показать, что функция $f(x)=\dfrac{1}{x^2+p^2}$ является плотностью распределения некоторой случайной величины X и вычислить вероятность попадания этой случайной величины в промежуток $]\ p,\infty\,[$.

14.Случайная величина X задана интегральной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax^2, & 0<x\le 7,\\ 1, & x>7.\end{cases}$$

Требуется: а)найти коэффициент a; б) построить дифференциальную функцию распределения; в) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$; г) найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

15.Считается, что отклонение длины изготовленной детали от стандарта является нормальной случайной величиной. Какую точность длины детали можно гарантировать с вероятностью 0,95, если стан-дартная длина равна 40 см, а среднее квадратическое отклонение s =0,64 см.

ВАРИАНТ 16

1.A_n - событие, заключающееся в том, что при n - ом повторении эксперимента осуществилось событие А. $B_{n,m}$ - событие, заключающееся в том, что при n первых испытаниях событие А осуществилось m раз. Выразить событие $B_{4,2}$ через A_i (i=1,2,3,4).

2.Колода карт (52 карты) произвольным образом делится пополам. Найти вероятность того, что в каждой половине будет по два туза.

3.В кошельке лежат 3 монеты по 25 коп и 7 монет по 5 коп . Наудачу берется монета, а затем вторая. Вторая извлеченная монета оказалась 25 - копеечной. Определить вероятность того, что и первая извлеченная монета имеет достоинство в 25 коп.

4.Два стрелка произвели по одному выстрелу. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,7, вторым - 0,6. Найти вероятность того, что хотя бы один из стрелков попал в мишень.

5.Брошены монета и игральная кость. Найти вероятность того, что на монете выпал герб, а на кости шесть очков.

6.Рабочий обслуживает четыре станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, для первого станка равна - 0,9, для второго - 0,8, третьего - 0,7 и четвертого - 0,9. Найти вероятность того, что в течение часа: а) по крайней мере один станок не потребует внимания рабочего; б) только один станок потребует внимания рабочего.

7.На двух станках обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,03, для второго - 0,02. Обработанные детали складываются в одном месте, причем там деталей с первого станка имеется в два раза больше, чем со второго. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь не будет бракованной.

8.Для участия в студенческих соревнованиях отобраны 4 студента первого курса, 6 - второго и 5 -третьего. Вероятности того, что студент первого, второго или третьего курсов попадут в сборную команду института равны соответственно 0,9, 0,7 и 0,8. Один из этой группы спортсменов попал в сборную. На каком курсе он вероятнее всего учится ?

9.Производится три выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Найти вероятность того, что в результате этих выстрелов будет только одно попадание.

10.Вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,02. Сверла укладываются в коробки по 100 штук. Найти вероятность того, что: а) в коробке не окажется бракованных сверл; б) число бракованных сверл окажется не более трех.

11.Сколько нужно произвести опытов, чтобы с вероятностью 0,9 утверждать, что частота интересующего нас события будет отличаться от вероятности его появления, равной 0,4, не более, чем на 0,1?

12.На опытном участке в 1000 га урожайность распределилась таким образом:

урожайность (в ц)	17	18	19	20	21	22	23
площадь (в га)	50	90	150	350	200	100	60

Рассматривая урожайность как случайную величину, определить ее математическое ожидание и дисперсию.

13.Случайная величина X задана интегральной функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ ax^2 + b, & -1 \le x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найти постоянные a и b и вычислить вероятность того,что случайная величина X примет значение в промежутке [0, 1].

14.Дан дифференциальный закон распределения случайной величины X

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0, x>1,\\ Ax^2, & 0<x\le 1.\end{cases}$$

Найти: а) коэффициент A; б) вероятность попадания X в интервал] -1, 1/2[; в) функцию распределения $F(x)$. Построить графики дифференциальной и интегральной функций распределения.

15.Предполагается, что предел прочности выпускаемой партии стальной проволоки является нормальной случайной величиной с математическим ожиданием 160 кг/мм^2 и средним квадратическим отклонением 8 кг/мм^2. Найти: а) функцию распределения и плотность вероятности этой случайной величины; б) предельное отклонение в ту или другую сторону от математического ожидания предела прочности испытываемого образца проволоки, которое можно гарантировать с вероятностью 0,9901.

ВАРИАНТ 17

1.Три детали проверяются на качество. Событие A_1 - все три детали качественные, A_2 - хотя бы одна деталь бракованная. В чем состоят события A_1+A_2 и A_1A_2?

2.В партии, состоящей из 50 изделий имеется 4 бракованных. Из этой партии наудачу выбирается 5 изделий. Найти вероятность того, что среди них будет 2 бракованных изделия.

3.Каждая из букв А, У, К, С, З написана на одной из пяти карточек. Карточки раскладываются в произвольном порядке одна за другой. Найти вероятность того, что при этом образуется слово “КАЗУС”.

4.Стрелок стреляет по мишени, разделенной на три зоны. Вероятность попадания в первую зону равна 0,45, во вторую - 0,30 и в третью - 0,15. Найти вероятность попадания в мишень.

5.В двух ящиках находятся детали. В первом ящике десять деталей, из которых 8 стандартных; во втором - пятнадцать деталей, из них 12 стандартных. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

6.Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены первый станок потребует внимания равна 0,7, второй - 0,75 ,третий - 0,8. Найти вероятность того, что в течение смены: а) два станка потребуют внимания рабочего; б) ни один станок не потребует внимания рабочего.

7.Упакованные консервы поступают с конвейера на проверку к одному из двух контролеров. Вероятность того, что проверяемая банка поступит к первому контролеру, равна 0,6, ко второму - 0,4. Вероятность того, что качественная банка будет признана стандартной при проверке первым контролером, равна 0,94, вторым - 0,98. Найти вероятность того, что наудачу взятая после проверки банка окажется стандартной.

8.При отклонении от нормального режима работы автомата срабатывает сигнализатор С-1 с вероятностью 0,8, а сигнализатор С-2 с вероятностью 0,99. Вероятности того, что автомат оборудован сигнализатором С-1 равна 0,6, сигнализатором С-2 - 0,4. Получен сигнал о разладке автомата. Что вероятнее: автомат снабжен сигнализатором С-1 или С-2?

9.Монета подбрасывается 8 раз. Какова вероятность того, что 6 раз она упадет гербом вверх?

10.Вероятность того, что взятая наугад из новой партии пара обуви окажется высшего сорта, равна 0,4. Чему равна вероятность того, что среди 600 пар обуви, поступивших на контроль, окажется от 228 до 252 пар высшего сорта?

11.Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет на пяти веретенах.

12.Испытывается устройство, состоящее из четырех независимо работающих приборов. Вероятности отказов в их работе соответственно равны 0,3, 0,4, 0,5 и 0,6. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, представляющей собой число отказавших приборов.

13.Плотность вероятности случайных амплитуд боковой качки корабля имеет вид

$$f(x) = Axe^{-\frac{x^2}{2a^2}}, a = const, x \geq 0.$$

Определить: а) коэффициент A; б) интегральную функцию распределения.

14.Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{125}{x^3}, & x \geq 5, \\ 0, & x < 5. \end{cases}$$

Найти дифференциальную функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

15.Диаметр деталей, выпускаемых цехом, представляет собой нормальную случайную величину с параметрами М(Х)=5 см и Д(Х)=0,01 см^2.

Найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали отличается от математического ожидания не более, чем на 2 мм.

ВАРИАНТ 18

1.Пусть A_1,A_2,A_3 - три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из событий A_1, A_2, A_3 : а) произошло только событие A_1; б) произошли все три события; в) произошло по крайней мере одно событие.

2.В партии из100 изделий имеется 8 штук бракованных. Какова вероятность того, что среди шести выбранных наугад для проверки изделий окажется два бракованных?

3.Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу выбранного жетона делится на 6.

4.Вероятность попадания в цель у первого стрелка равна 0,7, у второго - 0,8. Стрелки выстрелили одновременно. Какова вероятность того, что произошло одно попадание?

5.Детали проходят три операции обработки. Вероятность появления брака во время первой операции равна 0,02, второй-0,03, третьей-0,02. Найти вероятность получения стандартной детали.

6.Три стрелка стреляют в одну мишень. Известно, что вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка равна 0,5, для второго - 0,3, для третьего - 0,4. Определить вероятность того, что в результате одновременного выстрела всех трех стрелков будет : а) одна пробоина; б) не менее одной пробоины.

7.В каждой из двух урн содержится 4 черных и 6 белых шаров. Из второй урны наудачу извлечен шар и переложен в первую урну, после чего из первой урны наудачу извлечен шар. Найти вероятность того, что шар, извлеченный из первой урны, окажется белым.

8.В цехе три группы автоматических станков (по степени амортизации) производят одни и те же детали. Производительность их одинакова, но качество работ различно. Известно, что станки первой группы производят 80% деталей первого сорта, второй группы - 85%, третьей-90%. Все произведенные детали сложены в нерассортированном виде на складе. Взятая со склада деталь оказалась первого сорта. На станке какой группы вероятнее всего она была изготовлена, если станков первой группы 5 штук, второй-4шт. и третьей - 2шт.?

9.В магазине приобретено 5 телевизоров. Для каждого из них вероятность невыхода из строя в течение гарантийного срока равна 0,8. Определить вероятность того, что три телевизора в течение гарантийного срока не выйдут из строя.

10.Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,25. Найти вероятность того, что событие наступит 50 раз в 243 испытаниях.

11.Пять работниц окрашивают одинаковые по форме и размеру игрушки. Две из них производят окраску в красный цвет, а три - в зеленый. Производительность труда работниц одинакова. Окрашенные игрушки оказались перемешанными. Найти вероятность того, что среди 600 отобранных случайным образом игрушек красных от 228 до 264 штук включительно.

12.Дан ряд распределения случайной величины X:

x_i	10	20	30	40	50
p_i	0,2	0,3	0,35	0,1	?

Построить функцию распределения этой случайной величины и определить ее дисперсию.

13.Все значения случайной величины X принадлежат интервалу (0,2) и ее плотность вероятности f(x)=1/4 при 0<x≤ 1 и f(x)=3/4 при 1<x<2. Найти функцию распределения F(x), математическое ожидание M(X) и дисперсию Д(X).

14.Случайная величина X задана интегральной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ a\sin\frac{x}{2}, & 0<x\le p, \\ 1, & x>p. \end{cases}$$

Требуется: а)найти коэффициент a; б) построить дифференциальную функцию распределения; в) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$; г) найти вероятность того, что случайная величина примет значе-ние |X|<p .

15.Предполагается, что длина болтов, изготавливаемых на автоматическом станке, является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием 5.6см. Вероятность того, что наудачу взятый болт имеет размер от 5,55см до 5,65см, равна 0,9545. Чему равна вероятность того, что размер наудачу взятого болта от 5.6 до 5,75см?

ВАРИАНТ 19

1.Судно имеет одно рулевое устройство,4 котла и 2 турбины. Событие А означает исправность рулевого устройства, $B_к$ (к=1,2,3,4)- исправность к - того котла, C_n (n=1,2) - исправность n-й турбины. Событие Д означает - судно управляемое, что будет в том случае, когда исправны рулевое устройство, хотя бы один котел и хотя бы одна тур-бина. Выразить событие Д через А, В и C_n.

2.В мешочке имеется пять кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из букв О, П, С, Р, Т. Чему равна вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных в одну линию кубиках можно будет прочесть слово “СПОРТ”?

3.Из десяти билетов выигрышными являются два. Определить вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов: а) один билет выигрышный; б) хотя бы один выигрышный.

4.Ящик содержит 10 деталей, среди которых две нестандартные. Найти вероятность того, что в наудачу отобранных шести деталях окажется не более одной нестандартной детали.

5.Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет в цель равна 0,9. Стрелок произвел три выстрела. Найти вероятность того, что при этом получилось два попадания.

6.Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и потому набирает ее наугад. Какова вероятность того, что ему придется звонить не более, чем три раза?

7.Изделие может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями равными соответственно $p_1 = 0{,}25$, $p_2 = 0{,}25$ и $p_3 = 0{,}50$. Вероятности того, что изделие проработает заданное число часов для этих партий равны соответственно 0,1, 0,2 и 0,4. Определить вероятность того, что изделие проработает заданное число часов.

8.На фабрике, изготавливающей болты, машины А, В и С производят соответственно 25, 35 и 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2%. Случайно выбранный из продукции болт оказался бракованным. Какова вероятность того, что он был произведен машиной А? машиной В? машиной С?

9.В хлопке содержится 10% коротких волокон. Определить вероятность того, что среди отобранных наудачу шести волокон окажется не более двух коротких.

10.По данным технического контроля в среднем 10% изготавливаемых на заводе часов нуждаются в дополнительной регулировке. Чему равна вероятность того, что из 400 изготовленных часов 350 штук не будут нуждаться в дополнительной регулировке?

11.Известно, что 3/5 всего числа изготовляемых заводом телефонных аппаратов выпускаются первым сортом. Изготовленные аппараты располагаются один возле другого случайным образом. Приемщик берет первые попавшиеся 200 штук. Определить вероятность того, что среди них аппаратов первого сорта окажется : а) от 120 до 150 штук; б) от 90 до 150 штук включительно.

12.В урне имеется 4 шара с номерами 1,2,3,4. Вынули два шара. Случайная величина X - сумма номеров вынутых шаров. Построить ряд распределения этой случайной величины, найти ее функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию.

13.Случайная величина **X** задана дифференциальльной функцией распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 2, \\ A(x-2)(4-x), & 2 \le x < 4, \\ 0, & x \ge 4. \end{cases}$$

Найти коэффициент А , функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

14. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & 0 < x \le p, \\ 1, & x > p. \end{cases}$$

Найти дифференциальную функцию распределения $f(x)$. Вычислить $P(\frac{p}{4} \le X \le \frac{p}{2})$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

15.Заданы математическое ожидание a=15 и среднее квадратическое отклонение $s=2$ нормально распределенной случайной величины X. Найти: 1) вероятность того, что эта случайная величина примет значение из интервала (16, 25); 2) вероятность того, что абсолютная величина отклонения |X-a| окажется меньше 4.

ВАРИАНТ 20

1.Бросаются две игральные кости. Пусть А - событие, состоящее в том, что сумма очков нечетная; В - событие, заключающееся в том, что хотя бы на одной из костей выпала единица. Описать события АВ, А+В, А$\overline{B}$.

2.В партии из 80 банок консервов оказалось 6 бракованных. Какова вероятность того, что две подряд взятые банки окажутся бракован-ными?

3.В партии из 10 деталей 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди двух наудачу извлеченных деталей есть хотя бы одна стандартная.

4.На девяти карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Две из них вынимают наугад и кладут на стол в порядке появления, затем читают получившееся число. Какова вероятность, что это число четное?

5.Три спортсмена участвуют в отборочных соревнованиях. Вероятности их зачисления в сборную равны соответственно 0,8, 0,7 и 0,6. Найти вероятность того, что хотя бы один из этих спортсменов будет зачислен в сборную.

6.Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность принятия вызова равна 0,2 для первого вызова, 0,3 для второго и 0,4 для третьего. Найти вероятность установления связи, если события, состоящие в том, что данный вызов будет принят, независимы.

7.В вычислительной лаборатории имеется 6 клавишных автоматов и 4 полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения некоторо-го расчета автомат не откажет, равна 0,95, для полуавтомата эта вероятность равна 0,8. Студент производит расчет на наудачу взятой машине. Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не откажет.

8.Известно, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это мужчина? женщина? (Считать, что мужчин и женщин одинаковое число).

9.Вероятность изготовления стандартной детали на автоматичес-ком станке равна 0,9. Определить, чему равна вероятность того, что из пяти наудачу взятых деталей три окажутся стандартными.

10.Вероятность обрыва нити в течение минуты на каждом веретене прядильного станка равна 0,001. Найти вероятность того, что в течение одной минуты на 100 веретенах нить оборвется: а) один раз; б) хотя бы один раз.

11.Вероятность выпуска нестандартной электролампы 0,1. Чему равна вероятность того, что в партии 2000 ламп: а) число стандартных будет не менее 1790, б) число нестандартных будет менее 101 штук?

12.Два стрелка стреляют каждый по своей мишени, делая независимо друг от друга по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,7, для второго - 0,5. Рассматриваются две случайные величины: Х - число попаданий первого стрелка, У - число попаданий второго стрелка. Построить ряд распределения случайной величины Z = Х - У и найти ее математическое ожидание и дисперсию.

13.Плотность распределения случайной величины Х задается следующим образом

$$f(x)=\begin{cases} 0, x<0, \\ a-x, 0\le x\le a, \\ 0, x>a. \end{cases}$$

Требуется: а)определить коэффициент a ; б) найти функцию распределения; в) вычислить $P(\frac{a}{2} < X < a)$.

14.Функция распределения случайной величины X задана следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 1, \\ A(2 - \frac{2}{x^3}), x > 1. \end{cases}$$

Требуется: а) определить коэффициент А; б) найти плотность вероятности $f(x)$; в) найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

15.Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону с математическим ожиданием равным нулю и средним квадратическим отклонением $s = 1мм$. Найти вероятность того, что из двух независимых наблюдений ошибка хотя бы одного из них не превзойдет по абсолют-ной величине 1,28 мм.

ВАРИАНТ 21

1.Производится наблюдение за четырьмя однородными объектами. Каждый из них за время наблюдения может быть обнаружен или не обнаружен. Рассматриваются события: А - обнаружен хотя бы один объект, В - обнаружено не менее двух объектов, С - обнаружено ровно три объекта, Д - обнаружены все четыре объекта. Совпадают ли события АД и ВД ? Указать, в чем состоят события: А+В, АВ, АД.

2.Из полной колоды карт (52 карты) вынимают наугад сразу 3. Найти вероятность того, что эти карты будут тройка, семерка, туз.

3.Из пяти букв составлено слово “КНИГА”. Ребенок, неумеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал их в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получится слово “КНИГА”.

4.Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0,1, 9 очков - 0,3, 8 и меньше - 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее девяти очков.

5.В мастерскую по ремонту радиоприемников поступили две партии радиоламп определенного типа. В первой партии ламп в два раза больше, чем во второй, качество ламп в первой партии более высокое. Из большого числа нерассортированных ламп мастер берет первые попавшиеся две. Чему равна вероятность того, что обе лампы окажутся:

а) из какой-либо одной партии, б) из различных партий.

6.Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

7.В пирамиде установлено 5 винтовок, из которых 3 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с прицелом равна 0,95, для винтовки без прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из на удачу взятой винтовки.

8.Число грузовых машин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1, для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что эта машина грузовая.

9.В случайно выбранной семье 6 детей. Считая вероятность рождения мальчика и девочки одинаковыми, определить вероятность того, что